

1Qレポート

平面上を運動する物体について

栗藤 佑馬

まず始めに、平面上を運動する物体があり、この物体の時刻 t における加速度 a は、その方向は時刻によらず一定だが、その大きさは k と時間によって変化する。但し、 k は正の定数である。

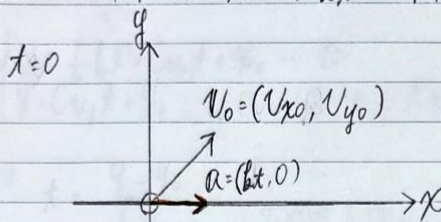
また、物体の $t=0$ における初速度を v_0 とする。

この運動に付き、 a の方向に x 軸を、

v_0 の y 成分が 0 となる方向に y 軸をとることに

すると、 $a = (kt, 0)$ 、 $v_0 = (v_{x0}, v_{y0})$ と表せる。

但し、 $v_{x0} \geq 0$ となるように x 軸の向きをとる。



物体の速度 v は加速度 a を時間 t で積分した物理量だから $v = \int a dt$ と書ける。

よって $a = (kt, 0)$ より $\int (kt, 0) dt = v$ と表せる。さらに、 k が正の定数であるので

$$v = \left(\frac{1}{2} k t^2 + C_{vx}, C_{vy} \right) \quad \text{但し、} C_{vx}, C_{vy} \text{ は積分定数とした。}$$

一方、位置 x は速度 v を時間 t で積分した物理量だから $x = \int v dt$ と書ける。

$$\text{よって } v = \left(\frac{1}{2} k t^2 + C_{vx}, C_{vy} \right) \text{ より } \int \left(\frac{1}{2} k t^2 + C_{vx}, C_{vy} \right) dt = x \text{ と表せる}$$

$$x = \left(\frac{1}{6} k t^3 + C_{vx} t + C_x, C_{vy} t + C_y \right) \quad \text{但し、} C_x, C_y \text{ は積分定数で、}$$

k, C_{vx}, C_{vy} が定数でよいことを
用いた。

ここで $t=0$ で物体は $x = x_0 = (x_0, y_0)$ にあるとすると

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{6} k \times 0^3 + C_{vx} \times 0 + C_x, C_{vy} \times 0 + C_y \right) \text{ が成り立ち、いなければならぬ。}$$

$$\text{これから } (x_0, y_0) = (C_x, C_y)$$

$$\text{従ってまとめると、時間 } t=0 \text{ の物体の位置は } x = \left(\frac{1}{6} k t^3 + C_{vx} t + x_0, C_{vy} t + y_0 \right)$$

と表わされる。

結果の可視化

ここでは、物体の $x-y$ 平面での軌道について考える

$$\begin{cases} x = \frac{1}{6} k t^3 + C v_x t + x_0 \dots ① \\ y = C v_y t + y_0 \dots ② \end{cases}$$

② から t を消去するように式変形を行う

②より $t = \frac{y - y_0}{C v_y}$ この式を①式に代入して

$$x = \frac{1}{6} k \left(\frac{y - y_0}{C v_y} \right)^3 + C v_x \left(\frac{y - y_0}{C v_y} \right) + x_0 \quad \text{を得る.}$$

$$X = x - x_0, \quad Y = y - y_0 \text{ とする}$$

両辺 Y で微分して

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{6} k \frac{Y^3}{C v_y^3} + \frac{C v_x}{C v_y} Y \\ X' &= \frac{k}{2 C v_y^3} Y^2 + \frac{C v_x}{C v_y} \\ X' &= 0 \text{ とおくと} \\ Y^2 &= - \frac{2 C v_x C v_y^2}{k} \dots ④ \end{aligned}$$

④について

(i) $C v_x C v_y > 0$ のとき $- \frac{2 C v_x C v_y^2}{k}$ は負の数になる。したがって、 $Y^2 < 0$ となるため、実数解を持たず、極値をもたない。

(ii) $C v_x C v_y = 0$ のとき $Y^2 = 0$ が得られる。次に $\frac{d^2 X}{dY^2} = \frac{d}{dY} \left(\frac{k}{2 C v_y^3} Y^2 + \frac{C v_x}{C v_y} \right) = \frac{k}{C v_y^3} Y$

$$Y = 0 \text{ における } \frac{d^2 X}{dY^2} \text{ の値は } \frac{k}{C v_y^3} \cdot 0 = 0 \text{ となる.}$$

2階微分が0であるから、この点が極値かどうか分からないため、さらに高階の微分を求める。

$$\frac{d^3 X}{dY^3} = \frac{d}{dY} \left(\frac{k}{C v_y^3} Y \right) = \frac{k}{C v_y^3} \quad \text{よって } Y = 0 \text{ は変曲点である.}$$

したがって $C v_x C v_y = 0$ のとき極値はない。

(iii) $Cv_x Cv_y < 0$ のとき $-\frac{2Cv_x Cv_y^2}{k}$ は正の数になる。したがって実数解が存在する。

$$Y = \pm \sqrt{-\frac{2Cv_x Cv_y^2}{k}} = \pm Cv_y \sqrt{-\frac{2Cv_x}{k}}$$

次に $Y = Cv_y \sqrt{-\frac{2Cv_x}{k}}$ のとき $\frac{d^2 X}{dY^2} = \frac{k}{Cv_y^3} Y$ を用いて $\frac{k}{Cv_y^3} \cdot Cv_y \sqrt{-\frac{2Cv_x}{k}} = \frac{k}{Cv_y^2} \sqrt{-\frac{Cv_x}{k}}$

$Cv_x Cv_y < 0$ より、 $-Cv_x > 0$ となるので、 $\frac{d^2 X}{dY^2} > 0$ となり、この点で極小値をとる。

よって極小値 X は

$$X = \frac{k}{6Cv_y^3} \left(Cv_y \sqrt{-\frac{2Cv_x}{k}} \right)^3 + \frac{Cv_x}{Cv_y} \left(Cv_y \sqrt{-\frac{2Cv_x}{k}} \right) \\ = \frac{k}{6} \left(-\frac{2Cv_x}{k} \right) \sqrt{-\frac{2Cv_x}{k}} + Cv_x \sqrt{-\frac{2Cv_x}{k}} = \frac{2Cv_x}{3} \sqrt{-\frac{2Cv_x}{k}}$$

$Y = -Cv_y \sqrt{-\frac{2Cv_x}{k}}$ のとき $\frac{d^2 X}{dY^2} = \frac{k}{Cv_y^3} Y$ を用いて $\frac{k}{Cv_y^3} \cdot (-Cv_y \sqrt{-\frac{2Cv_x}{k}}) = -\frac{\sqrt{-2Cv_x k}}{Cv_y^2}$

$\frac{d^2 X}{dY^2} > 0$ となり、この点で極大値をとる。

よって極大値 X は

$$X = \frac{k}{6Cv_y^3} \left(-Cv_y \sqrt{-\frac{2Cv_x}{k}} \right)^3 + \frac{Cv_x}{Cv_y} \left(-Cv_y \sqrt{-\frac{2Cv_x}{k}} \right) \\ = -\frac{k}{6} \left(-\frac{2Cv_x}{k} \right) \sqrt{-\frac{2Cv_x}{k}} - Cv_x \sqrt{-\frac{2Cv_x}{k}} = -\frac{2Cv_x}{3} \sqrt{-\frac{2Cv_x}{k}}$$

したがって、 $Cv_x Cv_y \geq 0$ のとき極値なし

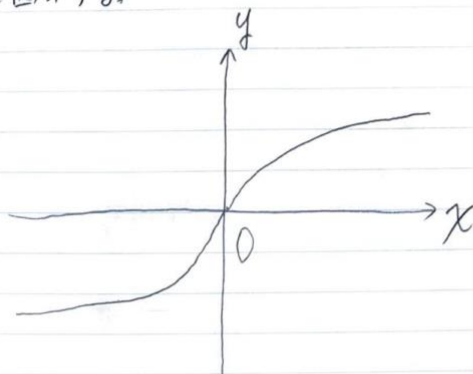
$Cv_x Cv_y < 0$ のとき $Y = Cv_y \sqrt{-\frac{2Cv_x}{k}}$ のとき極小値 $\frac{2Cv_x}{3} \sqrt{-\frac{2Cv_x}{k}}$

$Y = -Cv_y \sqrt{-\frac{2Cv_x}{k}}$ のとき極大値 $-\frac{2Cv_x}{3} \sqrt{-\frac{2Cv_x}{k}}$

但し、 $Cv_y \neq 0$ であると仮定している。

最後に x - y 平面でのグラフも図示する。

(i) $Cv_x Cv_y \geq 0$ のとき



(ii) $Cv_x Cv_y < 0$ のとき

