

3Qレポート

c425047 齊藤佑馬

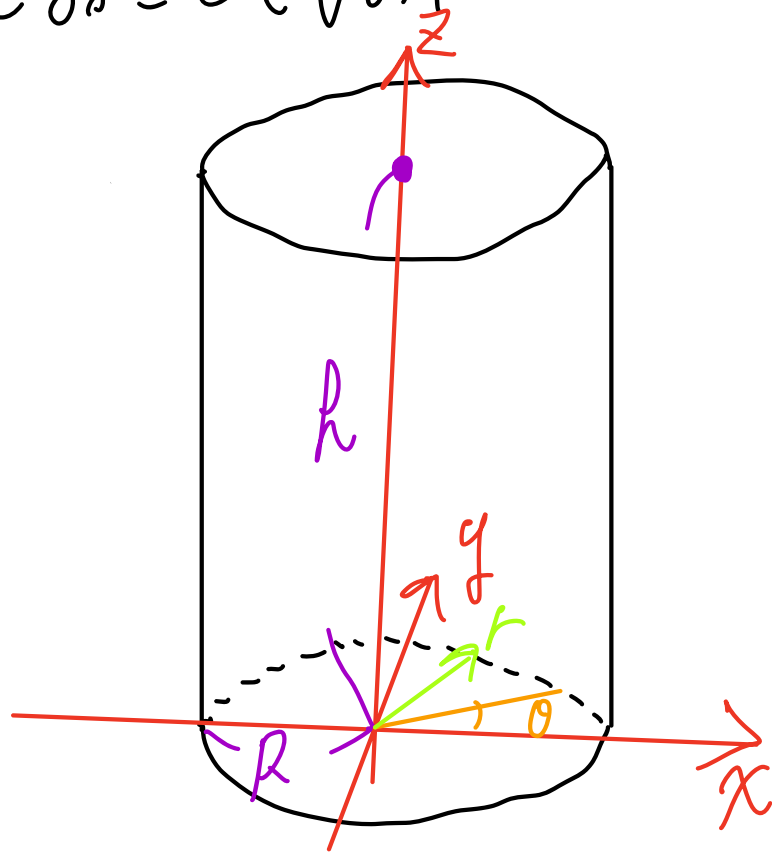
まず初めに、円柱座標 (r, θ, z) とする。

原点を円柱の底面Aの中心とし、 z 軸を円柱の中心軸と一致させ、底面Aから底面Bへ向かう方向を正とする。

また、 xy 平面を底面Aに存在するように x, y 軸をとる。

よって、 z の範囲は $0 \leq z \leq h$ となる。このとき h は底面Aから底面Bまでの距離である。また、 r 軸は中心軸からの動径距離を表す。ここで、 r の範囲は $0 \leq r \leq R$ となる。 R は底面の半径である。

また、 θ を z 軸周りの回転角を表し、 $\theta=0$ を x 軸の正方向に対応するようにとる。ここで θ の範囲は $0 \leq \theta \leq 2\pi$ である。



この座標を用いると、円柱の密度 ρ は

$\rho = k r z$ (k は定数)と与えられているので、

高さ z と中心軸からの距離 r の関数として
次のように表わされる。

$$\rho(r, z) = k r z$$

円柱座標における微小体積 dV は、

高さ方向の微小長さ dz ,

動径方向の微小長さ dr ,

動径 r の位置において、微小角度 $d\theta$ に

対応する円弧の長さは $r d\theta$ となり、

この3つの微小な長さ要素を掛け合わせる
ことで求められる

$$\text{よって } dV = dz \cdot dr \cdot (r d\theta)$$

$$\underline{dV = r dr d\theta dz}$$

円柱の全質量 M は、微小小体積の質量 $dM = \rho dV$ を円柱の全ての領域で積分することによって求められる。

$$M = \iiint_V \rho(r, z) dV$$
$$= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R (\rho r z) \cdot (r dr d\theta dz)$$

$$= \rho \int_0^h z dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^R r^2 dr$$

$$= \rho \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^h \cdot \left[\theta \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^R$$

$$M = \rho \cdot \frac{1}{2} h^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3} R^3$$

$$M = \frac{\pi \rho R^3 h^2}{3}$$

次に物体の重心の位置ベクトルは

$$\mathbf{G} = (0, 0, z_G) \text{ と表せる.}$$

これは、円柱の形状と密度の分布がともに z 軸に対して
対称であり、任意の高さ z において、質量分布は
中心軸に対して対称であるため、重心は中心軸上
にあることが明らかであるためである。

重心の位置ベクトルは

$$\mathbf{G} = \frac{1}{M} \iiint_V \mathbf{G} \rho dV \text{ と表せる.}$$

よって、

$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_V z \rho(r, z) dV$$

$$Z_G = \frac{1}{\mu} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R z \cdot (\rho r z) \cdot (r dr d\theta dz)$$

$$= \frac{\rho}{\mu} \int_0^h z^2 dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^R r^2 dr$$

$$= \frac{\rho}{\mu} \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_0^h \cdot \left[\theta \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^R$$

$$= \frac{\rho}{\mu} \cdot \left(\frac{1}{3} h^3 \right) \cdot (2\pi) \cdot \left(\frac{1}{3} R^3 \right) = \frac{2\pi \rho R^3 h^3}{9\mu}$$

$$\mu = \frac{\pi \rho R^3 h^2}{3} \text{ を代入すると}$$

$$Z_G = \frac{3}{\pi \rho R^3 h^2} \cdot \frac{2\pi \rho R^3 h^3}{9}$$

$$\underline{Z_G = \frac{2}{3} h}$$

したがって重心の位置は

$(0, 0, \frac{2}{3}h)$ である

次に、中心軸周りの慣性モーメント I_z は
各微小質量 dM と、回転軸からの距離 r の
2乗の積を物体全体で積分することを目指す。

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_V r^2 \rho(r, z) dV \\ &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \cdot (\rho r z) \cdot (r dr d\theta dz) \\ &= \rho \int_0^h z dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^R r^4 dr \\ &= \rho \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^h \cdot \left[\theta \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^R \\ &= \rho \cdot \left(\frac{1}{2} h^2 \right) \cdot (2\pi) \cdot \left(\frac{1}{5} R^5 \right) \\ I_z &= \frac{\pi \rho R^5 h^2}{5} \end{aligned}$$

$$\text{ここで } M = \frac{\pi \rho R^3 h^2}{3} \text{ であるから}$$

$$\rho = \frac{3M}{\pi R^3 h^2} \text{ と変形できる。}$$

これを I_z の式に代入すると

$$I_z = \frac{\pi R^5 l^2}{5} \cdot \frac{3\mu}{\pi R^3 l^2}$$

$$I_z = \frac{3}{5} \mu R^2 \quad \text{と求まる} //$$
